

УДК 621.3

А.А.ХАРИСОВ, канд. техн. наук

Харьковская государственная академия городского хозяйства

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕАЛЬНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В УЕДИНЕННЫХ ПРЯМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКАХ ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ ТОКОВЫХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМАХ

Методами электродинамики сплошных сред проведены теоретические исследования статистического распределения плотности постоянного тока в поперечном сечении уединенных прямых цилиндрических проводников. Установлено, что при постоянном токе в поперечном сечении уединенных прямых цилиндрических проводников распределение плотности тока принимает форму нормального («колоколообразного») распределения.

В практике различных электротехнических расчетов обычно априорно принимается, что при установившихся постоянных токах в поперечном сечении уединенных прямых цилиндрических проводников плотность тока распределяется равномерно:

$$J = I / S, \quad (1)$$

где I – постоянный электрический ток в проводнике; S – площадь поперечного сечения проводника.

Однако реальное распределение субъектов носителей тока в поперечном сечении проводников при постоянном токе далеко не такое простое, а как и во многих других случаях диафрагмированных, преимущественно направленных, перемещающихся статистических ансамблей, должно принимать некое нормальное (колоколообразное) распределение по скоростям, а следовательно, и плотности тока в направлении преимущественного перемещения.

В пользу нормального распределения постоянного тока в поперечном сечении прямых цилиндрических проводников свидетельствует известное явление пинч-эффекта, т.е. явление стягивания носителей электрического тока к центру инерции поперечного сечения проводников, по которым проходит постоянный ток, вследствие воздействия на субъекты носителей тока ими же создаваемого магнитного поля.

Предварительный анализ с учетом сделанных выше замечаний показывает, что в наиболее простом случае прямого круглого цилиндрического проводника с установившимся постоянным током и температурным режимом статистическое распределение плотности тока в плоскости поперечного сечения проводника при отсутствии внешнего электромагнитного поля представляется в виде

$$J_0(x, y) = \frac{I}{\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} r_0 \right)^2} \exp \left[- \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} r_0 \right)^2} \right] \quad (2)$$

или

$$J_0(\vec{r}) = \frac{I_n}{\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} r_0 \right)^2} \exp \left[- \frac{\vec{r}^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} r_0 \right)^2} \right],$$

где x, y или \vec{r} – текущие координаты в прямоугольной или полярной декартовой системе координат в плоскости поперечного сечения проводника с началом координат в точке симметрии поперечного сечения

проводника; $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} J_0(x, y) dy$ – полный ток в плоскости попереч-

ного сечения прямого круглого цилиндрического проводника; r_0 – внешний радиус прямого круглого цилиндрического проводника.

С целью проверки адекватности представленного выше распределения плотности тока в поперечном сечении прямых круглых цилиндрических проводников при протекании через них постоянных токов, задаваясь распределением плотности тока (2), найдем выражение их омического сопротивления через электромагнитные поля, создаваемые полным током проводника.

В качестве исходного расчетного выражения для этой цели используем известное энергетическое соотношение электродинамики сплошности сред [1]:

$$RI^2 = \int [\vec{E}\vec{H}] d\vec{f}, \quad (3)$$

где R – омическое сопротивление проводника; I – полный ток проводника; \vec{E}, \vec{H} – напряженности электрического и магнитного поля, создаваемые полным током проводника; $\int ... d\vec{f}$ – интегрирование ве-

дется по поверхности проводника.

В качестве граничного условия задачи принимаем проекцию напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$, делящую проводник на две симметричные половины:

$$E_z(x, y)|_{z=0} = \frac{I}{\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2 \gamma_0(T)} \exp \left[- \frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2} \right], \quad (4)$$

где l – длина прямого круглого цилиндрического проводника по оси z ; $\gamma_0(T)$ – удельная проводимость материала проводника.

Так как электрический ток в проводнике и проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$ имеет постоянные значения, задача удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

С такими условиями задачи при определении сопротивления проводника по формуле (3) интегрирование проводится по плоскости $z=0$. Кроме того, решение задачи достаточно найти в области $z>0$, предусмотрев увеличение значений полей в два раза в решении системы электростатических уравнений Максвелла.

Итак, для определения компонент напряженности электромагнитного поля, создаваемых током проводника, используем электростатические уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0; \quad -\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial x} = \gamma_0(T) E_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя к компонентам поля Фурье, получим:

$$E_{xk} = -j \frac{k_x}{k^2} \frac{dE_{zk}}{dz}; \quad E_{yk} = -j \frac{k_y}{k^2} \frac{dE_{zk}}{dz};$$

$$H_{xk} = -j\gamma_0(T) \frac{k_y E_{zk}}{k^2}; H_{yk} = j\gamma_0(T) \frac{k_x E_{zk}}{k^2}; k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (7)$$

В общем виде значение компоненты поля Фурье E_{zk} , удовлетворяющее граничному условию (5), принимаем в форме

$$E_{zk} = j \frac{k_x}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[j\vec{k}\vec{r} - kz] d\vec{k}, \quad (8)$$

где

$$E_k = \frac{1}{\gamma_0(T)} \int J_0(\vec{r}) \exp(-j\vec{k}\vec{r}) \quad (9)$$

– постоянная интегрирования.

Применяя обратное преобразование Фурье к (7), получим решение системы электростатических уравнений Максвелла в виде

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[j\vec{k}\vec{r} - kz] \frac{k_x}{k} d\vec{k}; \\ E_y(\vec{r}) &= \frac{j}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[j\vec{k}\vec{r} - kz] \frac{k_y}{k} d\vec{k}; \\ H_x(\vec{r}) &= -j \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[j\vec{k}\vec{r} - kz] \frac{k_y}{k} d\vec{k}; \\ H_y(\vec{r}) &= j \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_k \exp[j\vec{k}\vec{r} - kz] \frac{k_x}{k} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Принимая в уравнениях (10) $z=0$ и подстановки их $[\vec{E}\vec{H}]_{z=0} = E_x(\vec{r})H_y(\vec{r}) - E_y(\vec{r})H_x(\vec{r})$ в (3), получим искомое значение мощности омических потерь в прямом круглом цилиндрическом проводнике в виде

$$I^2 R = \frac{\gamma_0(T)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |E_k|^2 \frac{d\vec{k}}{k}. \quad (11)$$

Воспользовавшись граничным условием (4), выражением постоянной интегрирования (9) и интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha \xi^2) d\xi = \sqrt{\pi / \alpha} ,$$

получим значение постоянной интегрирования

$$E_k = \frac{I}{\gamma_0(T)} \exp \left[-\frac{k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right]. \quad (12)$$

После подстановки постоянной интегрирования (12) в (11) и перехода в цилиндрическую систему координат в k -пространстве получаем

$$I^2 R = \frac{I^2}{4\pi^2 \gamma_0(T)} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{2k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] \times \int_0^{2\pi} \exp(jk \cos \varphi) d\varphi dk. \quad (13)$$

Сокращая токи с обеих сторон уравнения (13) и заменяя последний интеграл в его правой части функцией Бесселя, приходим к выражению

$$R = \frac{1}{2\pi \gamma_0(T)} \int_0^{\infty} J_0(k) \exp \left[-\frac{2k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] dk. \quad (14)$$

Используя для вычисления интеграла по dk в (14) известное соотношение [2]

$$\int_0^{\infty} J_0(k) \exp \left[-\frac{2k^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2}{4} \right] dk = \left[\frac{\pi}{2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{r_0^2}{l} \right)^2} \right]^{1/2} = \frac{2l}{r_0^2}, \quad (15)$$

находим значение омического сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника в виде классического закона Ома

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T) \pi r_0^2}. \quad (16)$$

В случае прямых эллиптических цилиндрических проводников с установившимся токовым и температурным режимом, для которых закон Ома записывается в виде

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T) \pi ab}, \quad (17)$$

распределение плотности тока в их поперечном сечении принимает вид эллиптического нормального распределения

$$J_0(x, y)|_{z=0} = \frac{I}{\pi \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{ab}}{l} \right)^2} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{ab}}{l} \right)^2} \right], \quad (18)$$

где a и b – полуоси поперечного сечения эллиптического цилиндрического проводника соответственно по осям x, y .

В общем случае для прямых цилиндрических проводников с произвольной формой поперечного сечения омическое сопротивление проводника представляется выражением

$$R = \frac{l}{\gamma_0(T)} \left(\frac{2}{\pi ab + F} \right), \quad (19)$$

где a и b – полуоси эллипса, вписанного в поперечное сечение проводника (или круга $a = b$); F – площадь поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

При этом максимальная плотность тока колоколообразного рас-

пределения будет всегда находиться в точке центра инерции поперечного сечения прямого цилиндрического проводника.

И, наконец, для сравнения найдем выражение закона Ома для прямого цилиндрического проводника в предположении равномерного распределения плотности тока

$$J(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{I}{\pi r_0^2}, & |\vec{r}| \leq r_0, \\ 0, & |\vec{r}| > r_0. \end{cases} \quad (20)$$

В этом случае граничное условие, т.е. проекция напряженности электрического поля по оси z в точке $z=0$ принимает вид

$$E_z(\vec{r})|_{z=0} = \frac{I}{\gamma_0(T) \pi \left(\frac{r_0^2}{l} \right)^2}, \quad \vec{r} \leq r_0. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (8), получаем постоянную интегрирования

$$E_k = \frac{I}{\gamma_0(T)} \int \frac{I}{\pi \left(\frac{r_0^2}{l} \right)^2} \exp(-jk\vec{r}) \cdot \quad (22)$$

После подстановки постоянной интегрирования в (11) и ввода цилиндрической системы координат в \vec{k} -пространстве приходим к выражению

$$R = \frac{1}{\pi \gamma_0(T) \left(\frac{r_0^2}{l} \right)^2} \int_0^\infty \frac{J_1^2 \left(k \frac{r_0^2}{l} \right)}{k^2} dk, \quad (23)$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода.

Значение интеграла в (23) известно [2]

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2 \left(k \frac{r_0^2}{l} \right)}{k^2} dk = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_0^2}{l}. \quad (24)$$

Подставив значение интеграла (24) в (23), получим выражение сопротивления прямого круглого цилиндрического проводника постоянному току в предположении равномерного распределения плотности тока в его поперечном сечении:

$$R = \frac{2l}{3\pi^2 r_0^2 \gamma_0(T)}. \quad (25)$$

Как видим, в предположении равномерного распределения плотности тока в поперечном сечении прямого круглого цилиндрического проводника полученное значение сопротивления существенно отличается от классического закона Ома.

1.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 532 с.

2.Грандштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

Получено 26.06.2003

УДК 628.9.06 : 04.01

Р.Ж.КРУТОВОЙ

Харьковская государственная академия городского хозяйства

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СОЗДАНИЮ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩИХ СИСТЕМ ОСВЕЩЕНИЯ

Предлагается способ исследования изменения освещенности по различным направлениям расчетной или расчетных плоскостей с помощью совокупности интерполяционных многочленов, построенных с использованием узловых (опорных) точек.

В настоящее время одной из актуальных проблем жилищно-коммунального хозяйства является проблема энергосбережения. К ее решению непосредственное отношение имеет проблема проектирования систем освещения.

Известно, что проектирование систем освещения осуществляется с использованием большого числа различных программ, разработанных как фирмами-производителями светотехнического оборудования, так и фирмами-проектировщиками осветительных установок (ОУ). Эти программные продукты создаются, исходя из различных схем проектирования, используя различные алгоритмы вычислений и т.д.

В процессе разработки проектов ОУ различных типов перед проектировщиками возникают следующие проблемы: имеется совокупность светильников с заданными (известными) параметрами, нужно выбрать наиболее рациональный тип светильника и наиболее рациональный вариант размещения светильников с тем, чтобы обеспечить